TEMAS 11 y 12 : FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I

INTRODUCCIÓN. MOTIVACIÓN

Ejemplos de funciones de varias variables en Química.

- Ley de los gases ideales:

$$V = \frac{nRt}{P}$$

$V \equiv$ volumen ocupado por un gas

$n =$ nº de moles

$R =$ cte universal de los gases ideales

$T =$ temperatura absoluta

$P =$ presión absoluta.

La ecuación anterior nos dice que el Volumen V depende (o es función ~~de~~) de n, T, p. Matemáticamente, escribimos

$$V = V(n, t, p)$$

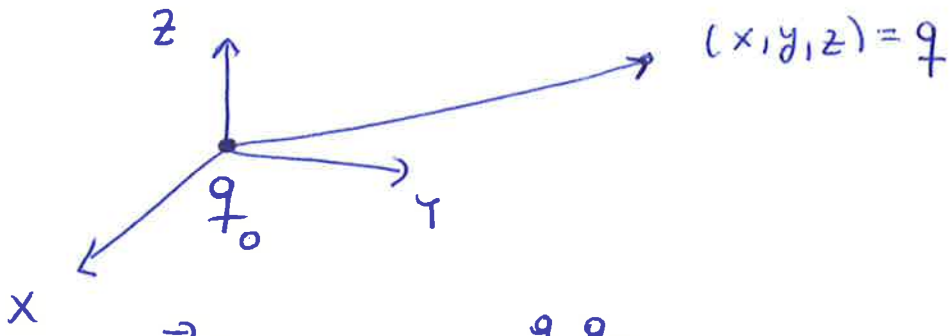
y decimos que V es una variable (o función) dependiente de las variables independientes n, T, p.

También podemos escribir

$$V: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(n, t, p) \longmapsto V(n, t, p)$$

y decimos que V es una función "escalar" que depende de 3 variables. También se dice que V es un campo escalar.

- Campo eléctrico creado por una carga puntual



$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{q\, q_0}{4\pi \varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)} (x,y,z)$$

El campo eléctrico se define como

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Por tanto

$$\vec{E} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longmapsto \vec{E}(x,y,z) = \frac{q \cancel{q_0}}{4\pi \varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)} (x,y,z)$$

$\vec{E}$ es una función vectorial de varias variables o también se dice un campo vectorial.

DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Def. Se llama función de varias variables a toda aplicación

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad , \; n > 1.$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

Si $m = 1$, f se llama función (o campo) escalar de varias variables.

Si $m > 1$, " " " " " vectorial " " ".

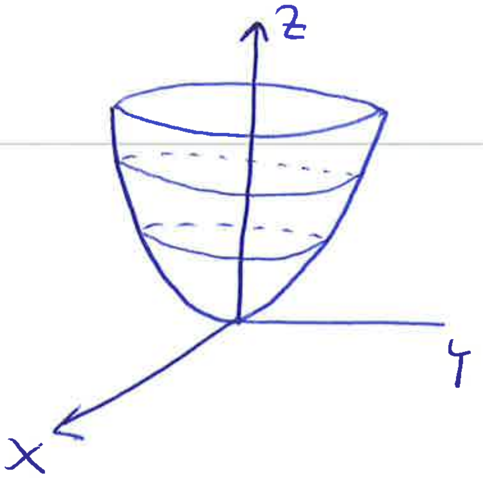
Ejemplos

1) Toda aplicación lineal es una función de varias variables, por ejemplo,

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto f(x,y) = (x+y, y, x-y)$$

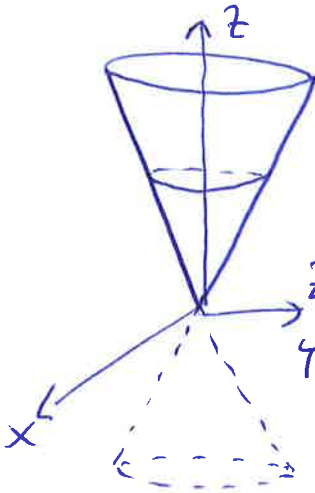
2) Paraboloide de revolución

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 + y^2$$



$z = x^2 + y^2.$

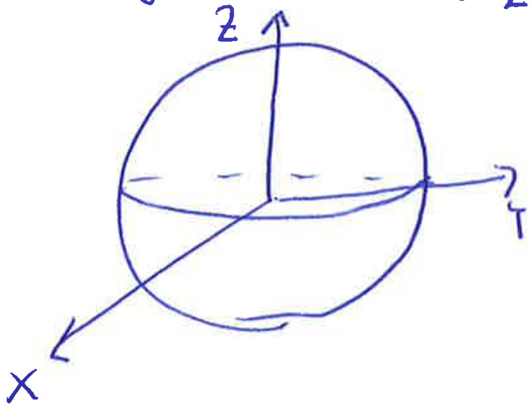
3) Cono $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$

4) Funciones dadas de forma implícita

$x^2+y^2+z^2=1 \longrightarrow z = \pm\sqrt{1-(x^2+y^2)}$



$x^2+y^2 \leq 1$

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = +\sqrt{x^2+y^2}$

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

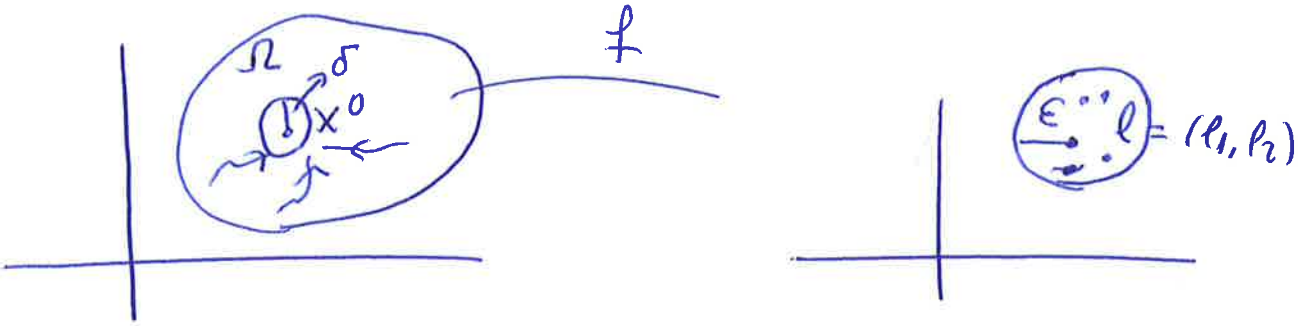
Concepto de límite para funciones de varias variables

Def. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ al que nos podemos acercar tanto como queramos desde puntos de Ω (en lo sucesivo diremos que x_0 es un punto de acumulación de Ω).

Se dice que $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = l = (l_1, \dots, l_m)$

si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(x^0, \varepsilon) > 0$ tal que si

$\underbrace{\|x - x^0\|}_{\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\dots+(x_n-x_n^0)^2}} \le \delta$, entonces $\underbrace{\|f(x) - l\|}_{\sqrt{(f_1(x)-l_1)^2+\dots+(f_n(x)-l_n)^2}} \le \varepsilon$.



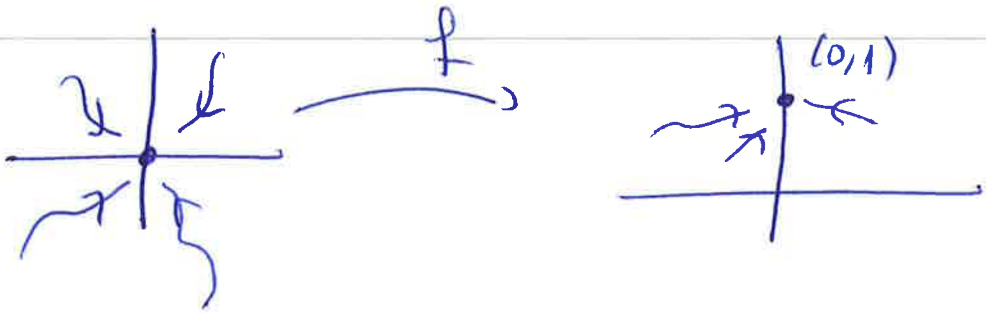
Si $\|x - x^0\| \le \delta \Longrightarrow \|f(x) - l\| \le \varepsilon$.

Ejemplo

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x^2+y^2,\ \cos x\, e^y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0, 1)$$

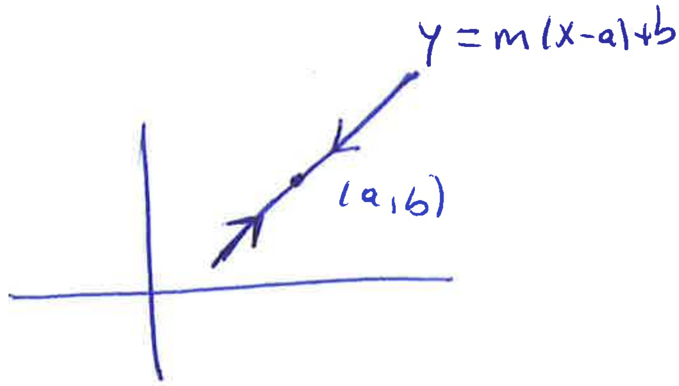


Límites Direccionales

Cuando el límite se toma a través de algunas direcciones concretas hablamos de "límites direccionales".

Por ejemplo,

→ A través de rectas



$$x^0 = (a,b)$$

$$y = \underbrace{m}_{\text{pendiente de la recta.}}(x-a)+b$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+2m^2x^2} =$$

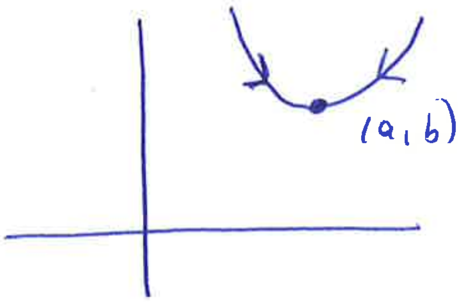
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+2m^2)} = \frac{1-m^2}{1+2m^2}$$

En este ejemplo, el valor del límite depende de m, pendiente de la recta. Obviamente, esto implica que NO existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

pues de existir, su valor tendría que ser un sólo punto de $\mathbb{R}$, y NO depender de la pendiente.

Nota.— También se pueden calcular límites siguiendo otro tipo de trayectorias, por ejemplo, parábolas

$$y = m(x-a)^2 + b$$



· En el caso de funciones de dos variables, una técnica útil de calcular límites es usando coordenadas polares. En efecto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow \rho \to 0 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{2\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\operatorname{sen}^2\theta - 2\rho^3\operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi[}} (2\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta - 2\rho\operatorname{sen}^3\theta) = 2\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta.$$

El valor del límite depende de θ, por tanto el límite no existe.

Continuidad de funciones de varias variables

Def. • Sean $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x^0 \in \Omega$.
Se dice que f es continua en x^0 si existe

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0).$$

• Sean $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x^0 \in \Omega$.
Se dice que f es continua en x^0 si cada una de las funciones coordenadas $f_j : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$ es cont$^{\underline{a}}$ en x_0, donde $f = (f_1, .., f_m)$.

Ejemplos

1) Los polinomios de varias variables son continuos, p.e.,

$$f(x,y,z) = xy + x^2y^3 + xy^2 + xyz + z^2.$$

2) La suma, el producto y la composición de funciones continuas es continuo.

$$f(x,y,z) = \operatorname{sen}(\pi xy)\operatorname{sen}(z^2 e^{x+y})$$

, . . .

3) ¿Es continua en $(0,0)$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi[}} (\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\,\text{sen}^2\theta)\,\text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\,\text{sen}^2\theta}}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta\in[0,2\pi[}} \underset{\downarrow \atop 0}{\rho^2}\; \underbrace{\text{sen}\,\frac{1}{\rho}}_{\text{acotado}} = 0$$

Por tanto, sí es cont$^{\underline{a}}$ en $(0,0)$.

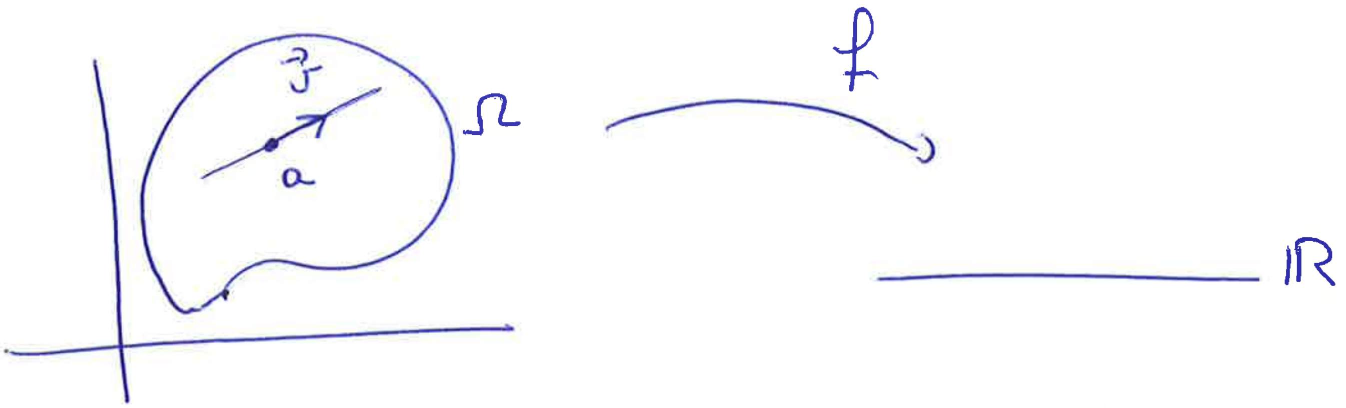
DERIVABILIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

DERIVADAS PARCIALES Y DERIVADAS DIRECCIONALES

Def. (Derivada Direccional)

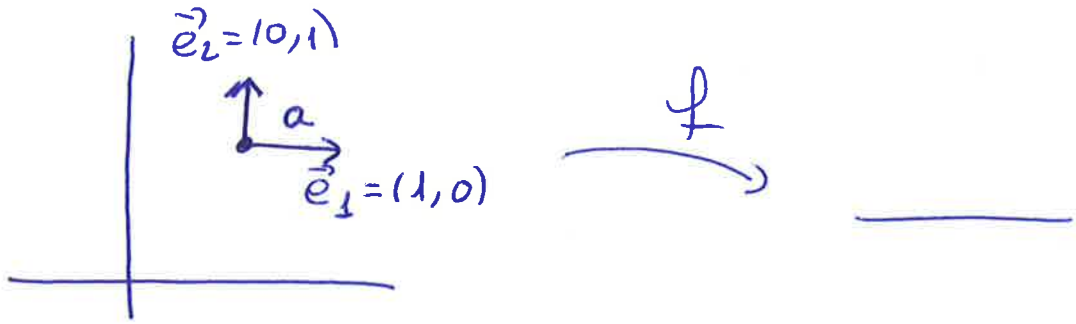
Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a = (a_1, .., a_n) \in \Omega$. Se llama derivada direccional de f en a según la dirección del vector $\vec{v} = (v_1, .., v_n) \in \mathbb{R}^n$ al número

$$D_{\vec{v}} f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\vec{v}) - f(a)}{h}$$



Def. (Derivadas parciales). Cuando en la definición anterior $\vec{v} = \vec{e}_j = (0, 0, .., \underbrace{1}_{j\text{-ésimo}}, 0, .., 0)$, la derivada direccional se llama "derivada parcial" y se denota

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad 1 \le j \le n.$$



$$D_{\vec{e}_1} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$$

$$D_{\vec{e}_2} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

Ejemplos

1) $f(x,y) = x^2+y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f((x,y)+h(1,0)) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+y^2 - (x^2+y^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+h^2+2x\cancel{h}+\cancel{y^2}-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}}{\cancel{h}}$$

$$= 2x.$$

De forma completamente análoga,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Nota (Importante)

Las derivadas parciales de una función de varias variables se calculan derivando la variable correspondiente y tomando el resto de variables como constantes.

Ejemplos

1) $f(x,y) = e^{x^2+\operatorname{sen} y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+\operatorname{sen} y} \cdot 2x$$

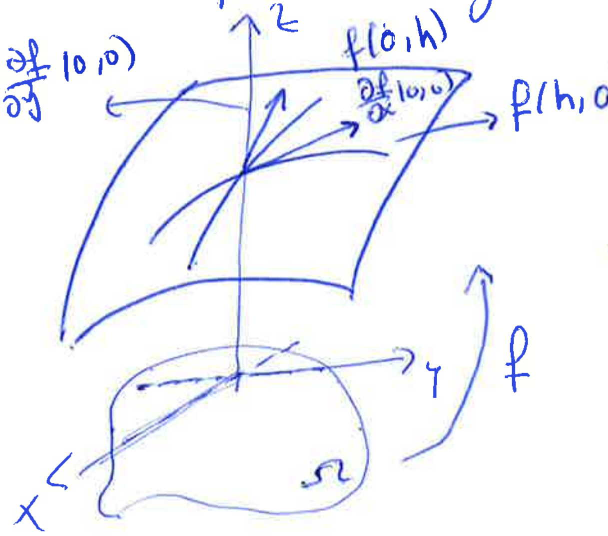
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+\operatorname{sen} y} \cdot \cos y .$$

2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\cdot(x^2+y^2) - xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\,(x^2+y^2) - xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Interpretación geométrica de las derivadas parciales



$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1,0)) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

expresa la variación de f en la dirección $(1,0)$.

y coincide con el valor de la pendiente de la función (de una variable) $f(x,0)$ en el punto $(0,0)$.

~~Def~~

Def. (Gradiente de un campo escalar)

Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \Omega$. Supongamos que existen las derivadas parciales de f en a. Se llama gradiente de f en a, denotado $\nabla f(a)$, al vector que en coordenadas cartesianas viene dado por

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

- Relación entre las derivadas parciales y la derivada direccional.

Sean $C = \{ \vec{e}_1 = (1,0,\dots,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, \vec{e}_n = (0,\dots,0,1) \}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + \dots + v_n \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\}_{j=1}^{n}$, entonces existe la derivada direccional $D_{\vec{v}} f(a)$ y además se cumple

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{v}}$$

¿Por qué se cumple esta fórmula?

$$D_{\vec{v}} f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\vec{v}) - f(a)}{h}$$

$$= \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} f(a + h\vec{v})$$

$$= \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} f(\overbrace{a_1+hv_1}^{x_1}, \overbrace{a_2+hv_2}^{x_2}, \dots, \overbrace{a_n+hv_n}^{x_n})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regla de la cadena}}}{=} \frac{df}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dh}\Big|_{h=0} + \frac{df}{dx_2} \frac{dx_2}{dh}\Big|_{h=0} + \dots + \frac{df}{dx_n} \frac{dx_n}{dh}\Big|_{h=0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot v_n$$

$$= \nabla f(a) \cdot \vec{v}.$$

Ejemplos

1) $f(x,y) = xy, \quad a = (1,1), \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$D_{\vec{v}} f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left((1,1) + h \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(1,1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1,1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + \frac{\cancel{h}}{\sqrt{2}} + \frac{\cancel{h}}{\sqrt{2}} + \frac{h^{\cancel{2}}}{2} - \cancel{1}}{\cancel{h}}$$

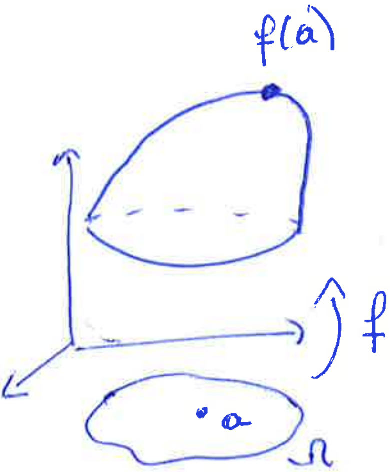
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\cancel{\partial f}\ \nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \right) = (1, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\nabla f(1,1) \cdot \vec{v} = (1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

2) Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ unitario, es decir, $\|\vec{v}\| = 1$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que tiene derivadas parciales en a. ¿Cuál es la dirección de máxima pendiente?



Buscamos $\vec{v}$, $\|\vec{v}\| = 1$ de modo que $D_{\vec{v}} f(a)$ sea máxima. Como

$$D_{\vec{v}} f(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{v}$$
$$= \|\nabla f(a)\| \underbrace{\|\vec{v}\|}_{1} \cos(\nabla f(a), \vec{v})$$
$$= \|\nabla f(a)\| \cos(\nabla f(a), \vec{v})$$

es máximo ~~cua~~ cuando $\cos(\nabla f(a), \vec{v}) = 1$, es decir cuando $\nabla f(a)$ es paralelo a $\vec{v}$.

Por tanto, dirección de $\begin{cases} \text{máximo ascenso} : \vec{v} = \nabla f(a) \\ \quad \text{"} \quad \text{descenso} : \vec{v} = -\nabla f(a) \end{cases}$

<u>Aplicación</u>. <u>Ley de Fourier</u>: el flujo de calor por conducción es proporcional al gradiente de la temperatura

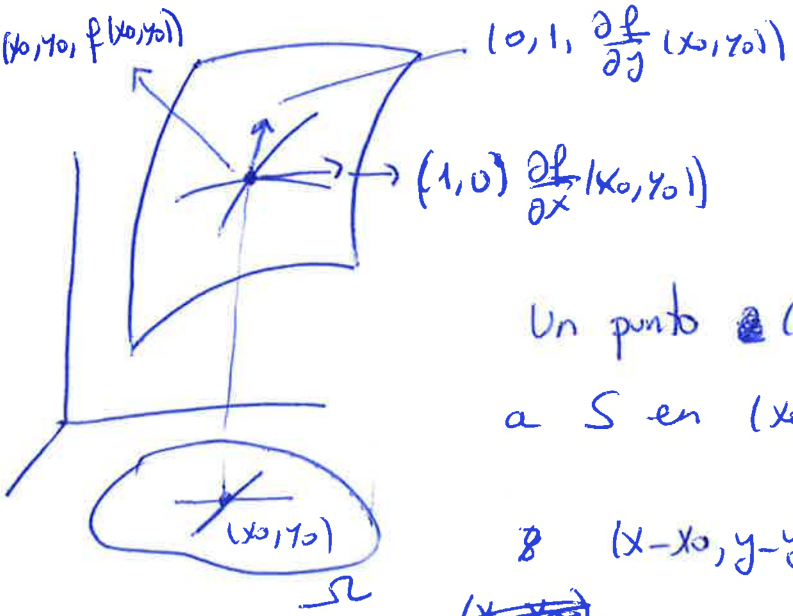
$\vec{q} = -k \nabla T$, $k > 0$ conduct. térmica

"Los sólidos tienden a enfriarse lo más rápido posible".

· Otra interpretación geométrica de las derivadas parciales: plano tangente a una superficie

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que tiene derivadas parciales. La gráfica de f define la superficie

$$S = \{ (x,y,z) : z = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega \}$$



Un punto (x,y,z) pertenece al plano tangente a S en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \iff \exists\ \lambda, \mu$ tales que

$$(x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0)) = \lambda \left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) + \mu \left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

$$\iff 0 = \begin{vmatrix} x-x_0 & 1 & 0 \\ y-y_0 & 0 & 1 \\ z-f(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

$$= z - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$\iff \boxed{z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\ y-y_0)}$$

Veamos un ejemplo concreto: calcula el plano tangente a la superficie $z = 14 - x^2 - y^2$ en el punto $(1,2,9)$ y también el punto $(0,0,14)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

$$f(1,2) = 9 \qquad \nabla \cancel{f}(1,2) = (-2,-4)$$

$$z = 9 \cancel{+} (-2,-4)\cdot(x-1, y-2)$$

$$= 9 - 2(x-\cancel{y}) - 4(y-2)$$

$$= 9 - 2x + 2 - 4y + 8;$$

$$\boxed{2x + 4y + z = 19}$$

Punto $(0,0,14)$. $\nabla z(0,0) = (0,0)$

$$z = 14 + (0,0)\cdot(x-0, y-0)$$

$$\boxed{z = 14}$$

~~Relación entre las derivadas parciales y la continuidad~~

Derivadas de orden superior

Sean $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Consideremos las funciones derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , 1 \leq j \leq n .$$
$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

Podemos derivar nuevamente cada una de estas funciones respecto a cada una de sus variables. Hablamos entonces de derivadas parciales segundas y así sucesivamente. Se denotan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} \quad , \text{etc} \ldots$$

Ejemplo

Comprueba que la función

$$T(x,y,t) = e^{-2t} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

es solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -2 e^{-2t} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = e^{-2t}\cos x \,\mathrm{sen}\, y \;;\quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,x\cos y \;;\quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= -2e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y \\ &= \frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned}}$$

DIFERENCIABILIDAD

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en a si existe una aplicación lineal, que denotamos por $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y llamamos diferencial de f en a, tal que

$$\lim_{\substack{\vec{h} \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^n}} \frac{f(a+\vec{h}) - f(a) - df(a)(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = (0, \dots, 0).$$

Nota.– Nótese que el concepto de diferenciabilidad es más fuerte (más exigente) que el de derivada direccional (o el de derivada parcial). En efecto, en la derivada direccional $\vec{h} = t\vec{v}$, con $\vec{v}$ fijo y $t \in \mathbb{R}$ tal que $t \to 0$. En cambio, en ~~el~~ la definición de diferenciabilidad $\vec{h}$ es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$ cuyo módulo se hace pequeño. Por tanto, ~~más~~ en el cociente incremental de la diferencial el límite se toma en CUALQUIER DIRECCIÓN $\vec{h}$ y no ~~es~~ en direcciones concretas de la forma $t\vec{v}$, como en el caso de las derivadas direccionales.

Propiedades de la diferencial

1) Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

2) Si f es diferenciable en a, entonces existen las derivadas parciales de primer orden de f en a. Además,

$$df(a)(\vec{e}_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad , \quad \vec{e}_j = (0,0,..,0,\overset{j\text{-ésimo}}{1},0,..,0)$$

En esta expresión se entiende que si f es una función vectorial $f = (f_1,..,f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \right).$$

3) Si f tiene derivadas parciales de primer orden en a y todas ellas son funciones continuas, entonces f es diferenciable en a.

Definición (Matriz Jacobiana)

Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que f es diferenciable en a. A la matriz asociada a $df(a)$ respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ se le llama matriz Jacobiana y se denota por $Jf(a)$, es decir,

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

NOTA.- Nótese que si $m=1$, es decir, f es un campo escalar, entonces $Jf = \nabla f$, es decir, la matriz Jacobiana es el gradiente de f. Por este motivo, si $\vec{f}$ es un campo vectorial ($m>1$) es también muy habitual llamar a la matriz Jacobiana de $\vec{f}$ el gradiente de $\vec{f}$ y denotarlo por $\nabla \vec{f} = J\vec{f}$.

Ejemplos

1) $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (\overbrace{x^2-y}^{f_1}, \overbrace{0}^{f_2}, \overbrace{\operatorname{sen}(xy)}^{f_3}, \overbrace{e^{2y}}^{f_4})$$

$$\nabla \vec{f} = J\vec{f} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \nabla f_3 \\ \nabla f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 0 & 0 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 0 & 2e^{2y} \end{pmatrix}.$$

2) La diferencial en Física y Química. ~~Notación~~

Notación: Si $z = f(x_1, \dots, x_n)$ es un campo escalar, la diferencial de f se suele denotar en Física y Química como

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) dx_n$$

$$\equiv df$$

y se suele llamar "diferencial total".

Por ejemplo, el volumen de un fluido depende de la presión, temperatura y cantidad de sustancia n, es decir, $V = V(p, T, n)$.

El "diferencial total de volumen" es

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n} dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n} dp + \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{p,T} dn$$

donde el subíndice indica las variables que permanecen ctes durante la derivación parcial correspondiente, es decir,

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n}$ indica que se deriva respecto a T, permaneciendo p y n ctes.

Si denotamos por:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{n,p} \equiv \text{expansividad térmica}$$

$$k = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n} \equiv \text{compresibilidad isotérmica}$$

$$V_m = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{p,T} \equiv \text{volumen molar,}$$

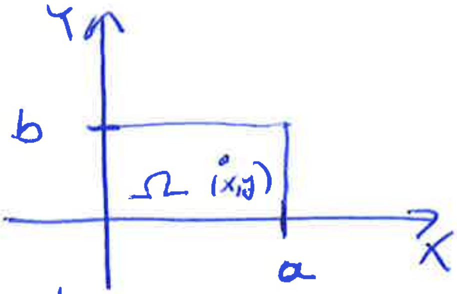
entonces $$\boxed{dV = \alpha V\, dT - k V\, dp + V_m\, dn}$$

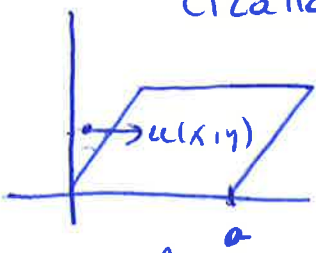
Una de las aplicaciones de la diferencial total en Química es en la formulación de las leyes de la Termodinámica.

3) Consideremos la placa bi-dimensional

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a \,,\ 0 < y < b\}$$

cizallamiento.





En Elasticidad se dice que Ω sufre una deformación por cizallamiento si cada punto (x,y) sufre un desplazamiento de la forma

$$\vec{u}(x,y) = (ky \quad 0) \,, \text{ con } k>0 \text{ cte.}$$

Se llama tensor de deformaciones (linealizado) a la matriz

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T\right)$$

Vamos a calcular $\varepsilon(\vec{u})$ en este caso:

$$\nabla \vec{u} = J\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\boxed{\varepsilon(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix}}.$

Regla de la cadena para funciones de varias variables

Teorema Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ dos funciones de modo que f es diferenciable en x^0 y g es diferenciable en $f(x^0)$. Entonces, la función compuesta

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

es diferenciable en x^0. Además

composición de apl. lineales

$$\boxed{d(g \circ f)(x^0) = dg(f(x^0)) \circ df(x^0).}$$

En términos de matrices jacobianas,

producto de matrices.

$$\boxed{J(g \circ f)(x^0) = Jg(f(x^0)) \cdot Jf(x^0)}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Ejemplos

1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (\overbrace{\underbrace{x^2z - 3\cos y}_{f_1}}^{u}, \overbrace{\underbrace{3 - zy}_{f_2}}^{v})$$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(u,v) \longmapsto g(u,v) = u\, e^{-5v}$$

Calcular $J(g\circ f)(x,y,z)$.

Se tiene que

$$J(g\circ f)(x,y,z) = Jg(f(x,y,z)) \cdot Jf(x,y,z).$$

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz & 3\operatorname{sen} y & x^2 \\ 0 & -z & -y \end{pmatrix}$$

$$Jg(u,v) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \left(e^{-5v}, -5u\,e^{-5v} \right)$$

$$Jg(f(x,y,z)) = \left(e^{-5(3-zy)} \quad -5(x^2z - 3\cos y)\,e^{-5(3-zy)} \right)$$

$$J(g\circ f)(x,y,z) = \left(e^{-5(3-zy)} \quad -5(x^2z - 3\cos y)\,e^{-5(3-zy)} \right) \begin{pmatrix} 2xz & 3\operatorname{sen} y & x^2 \\ 0 & -z & -y \end{pmatrix}$$

$$= \Big(2xz\,e^{-5(3-zy)} \quad 3\operatorname{sen} y\, e^{-5(3-zy)} + 5z(x^2z - 3\cos y)\,e^{-5(3-zy)}$$

$$x^2 e^{-5(3-zy)} + 5y(x^2z - 3\cos y)\,e^{-5(3-zy)} \Big)$$

Otra forma de hacer la regla de la cadena

$$g\circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(g\circ f)(x,y,z) = g(u,v) = g(u(x,y,z), v(x,y,z))$$

$$u(x,y,z) = x^2 z - 3\cos y$$

$$v(x,y,z) = 3 - zy$$

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^{-5(3-zy)}\cdot 2xz + -5(x^2z - 3\cos y)e^{-5(3-zy)}\cdot 0$$

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= e^{-5(3-zy)}\, 3\,\text{sen}\, y - 5(x^2z - 3\cos y)e^{-5(3-zy)}\cdot(-z)$$

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$= e^{-5(3-zy)}\cdot x^2 - 5(x^2z - 3\cos y)\, e^{-5(3-zy)}\cdot(-y)$$

2) Consideremos el campo escalar

$$f(x,y) = xy.$$

Consideremos las coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$

En coordenadas polares el campo f se escribe como:

$$F(r,\theta) = r\cos\theta \cdot r\,\mathrm{sen}\,\theta = r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Nótese que estamos haciendo la composición de dos funciones.

$$\cancel{(x,y) \longmapsto f}$$

$$(r,\theta) \longmapsto (\underbrace{r\cos\theta}_{x}, \underbrace{r\,\mathrm{sen}\,\theta}_{y}) \longmapsto x\cdot y$$

OJO! con la notación: como x, y dependen de (r,θ) es habitual (aunque confusa) la notación

$$f = f(x,y) = f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = f(r,\theta) = r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

La notación es confusa pues estrictamente hablando

$$f(r,\theta) = r\cdot\theta$$

ya que $f(x,y) = xy$.

Pese a todo, la notación $f(r,\theta) = r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$ es muy habitual y hay que acostumbrarse a ella.

Vamos a calcular ∇f en polares :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= y \cdot \cos\theta + x \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$= r \operatorname{sen}\theta \cos\theta + r \cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$= 2 r \cos\theta \operatorname{sen}\theta .$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= y \cdot (-r \operatorname{sen}\theta) + x \cdot r \cos\theta$$

$$= -r^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta + r^2 \cos^2\theta$$

$$= \cancel{r^2 (\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta \cos\theta)}$$

$$= r^2 (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\nabla_{(r,\theta)} f = \left(2 r \cos\theta \operatorname{sen}\theta ,\ r^2 (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\right).$$

~~Deriv~~

DERIVACIÓN DE LA FUNCIÓN INVERSA

Supongamos que $g \circ f = 1$, es decir, $g = f^{-1}$

~~Entonces~~

Por tanto, como $(g \circ f)(x) = 1(x) = x$, se tiene que

$$I = Jf^{-1}(f(x_0)) \cdot Jf(x_0)$$

de donde

$$Jf^{-1}(f(x_0)) = (Jf(x_0))^{-1}.$$

Ejemplos

1) $f(x) = x^2$, $\quad y = x^2$, $\quad \frac{dy}{dx} = 2x$

$x = \sqrt{y}$ $\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Así, $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}y} \cdot 2\sqrt{y} = 1.$

OJO! No tratar $\frac{dx}{dy}$ como una fracción pues "NO LO ES".

2) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \arctan \frac{y}{x}$

$$[0,+\infty[\times [0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r,\theta) \longrightarrow (x,y)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} = \cos^2\theta \neq 1.$$

Lo que da 1 es ~~la~~ el producto de las matrices jacobianas.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

OPERADORES DIFERENCIALES MÁS USUALES EN COORDENADAS CARTESIANAS

- Gradiente: dado un campo escalar $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se llama gradiente de f, denotado ∇f ó grad f, al campo vectorial

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

- Divergencia: Dado un campo vectorial

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

se llama divergencia de F, denotado $\nabla \cdot F$ ó div F, al campo escalar

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

$$\left(= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (F_1, F_2, \dots, F_n) \right)$$

- Rotacional: Dado un campo vectorial

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$$

se llama rotacional de F, denotado $\nabla \times F$ ó rot F, al campo vectorial

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)\vec{k}.$$

Def. (Laplaciano)

Dado un campo escalar $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se llama Laplaciano de f, al campo escalar

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

NOTA.- Las leyes Físicas que sirven de base para la Ingeniería se escriben en términos de estos 4 operadores diferenciales. Por ejemplo, en Electromagnetismo:

- Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ • Divergencia

$\vec{E} \equiv$ campo eléctrico

$\rho \equiv$ densidad de carga

$\varepsilon_0 \equiv$ permitividad eléctrica del vacío.

$\vec{E}$ es conservativo $\Rightarrow \exists\ \phi = \phi(x,y,z)$ potencial del campo de modo que $\vec{E} = -\nabla\phi$ Gradiente.

Por tanto,

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \underset{\uparrow}{\nabla^2} \phi = \rho$$

Laplaciano.

Ley de Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

rotacional , $\vec{B} \equiv$ campo magnético.

Ley de Ampère:

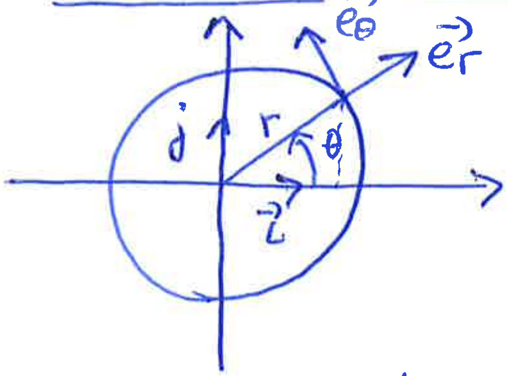
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

μ_0 $\vec{J} \equiv$ densidad de corriente.

etc.....

Cambios de coordenadas en los operadores diferenciales.

COORDENADAS POLARES



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} r &= +\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Base de coordenadas cartesianas: $B = \{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\}$

" " " polares : $B' = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$

$\vec{e}_r$ = vector unitario en la dirección radial

$\vec{e}_\theta$ = " " tangente a la circunferencia que pasa por (x,y) y cuyo sentido es el antihorario.

Matrices de cambio de base

$$M_{B' \to B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\,\theta\,\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\text{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

$$M_{B\to B'} = (M_{B'\to B})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta\, \vec{e_r} - \operatorname{sen}\theta\, \vec{e_\theta} \\ \vec{j} = \operatorname{sen}\theta\, \vec{e_r} + \cos\theta\, \vec{e_\theta} \end{cases}$$

El gradiente en polares

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$$f = f(x,y) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} r\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta \end{cases}$$

$$r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} r\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos^2\theta$$

$$r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} = r\frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}}$$

Multiplicando ahora por $r\cos\theta$ la ecuación de $\frac{\partial f}{\partial r}$

y por $-\operatorname{sen}\theta$ la de $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ se tiene:

$$r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} r\cos^2\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

$$-\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} r\operatorname{sen}^2\theta - \frac{\partial f}{\partial y} r\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} = r\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}}$$

Por tanto:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$

$$+\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$

$$=\left(\cos^2\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \cancel{\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}} + \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \cancel{\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}}\right)\vec{e}_r$$

$$+\left(\cancel{-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}} + \frac{1}{r}\cancel{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} + \cancel{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}} + \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta$$

$$= \boxed{\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta} \equiv \text{gradiente en coordenadas polares.}$$

La divergencia en polares

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$$

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial r} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial \theta} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \dfrac{\partial F_1}{\partial y} r\cos\theta \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial F_1}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta \frac{\partial F_1}{\partial \theta}}$$

Análogamente,

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial F_2}{\partial r} = \dots \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial \theta} = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_2}{\partial y} = \mathrm{sen}\,\theta \frac{\partial F_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial F_2}{\partial \theta}}$$

Sustituyendo estos valores en la divergencia en cartesianas se tiene:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\, F_1 + \mathrm{sen}\,\theta\, F_2\right)$$

$$+ \frac{1}{r}\left(-\mathrm{sen}\,\theta \frac{\partial F_1}{\partial \theta} + \cos\theta \frac{\partial F_2}{\partial \theta}\right)$$

$$=$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\, F_1 + \operatorname{sen}\theta\, F_2\right)$$

$$+ \frac{1}{r}\left(-\operatorname{sen}\theta\, \frac{\partial F_1}{\partial \theta} + \cos\theta\, \frac{\partial F_2}{\partial \theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r}\left(-\cos\theta\, F_1 - \operatorname{sen}\theta\, F_2\right)$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\cos\theta\, F_1 + \operatorname{sen}\theta\, F_2\right)$$

$$= \left| \text{ denotamos } \left\{ \boxed{\begin{array}{l} F_r = \cos\theta\, F_1 + \operatorname{sen}\theta\, F_2 \\ F_\theta = -\operatorname{sen}\theta\, F_1 + \cos\theta\, F_2 \end{array}} \right\} \right|$$

$$= \boxed{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\right]} \equiv \text{divergencia en polares}$$

Nótese que

$$\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{matriz de cambio de base.}} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v_{B'} = M_{B \to B'}\, v_B}$$

El Laplaciano en polares

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$
$$+\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$
$$= \cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$
$$+\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$
$$= \boxed{\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mathrm{sen}^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

Análogamente se tiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -r\left(\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$+\,r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$+\,r^2\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Por tanto:

$$r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - r\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

de donde se deduce que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}}$$

Laplaciano en polares.

Con el mismo tipo de razonamientos se calcula el rotacional en polares y el resto de operadores diferenciales en cilíndricas y cartesianas.